

11 класс. Шәһәр туры.

1. $x^2 + px + q$ квадрат өчбуынының ике төрле x_1 һәм x_2 тамырлары бар, һәм $x_1^2 + x_2^2 = 1$. $p^2 = 2q + 1$ икәннен исбатлагыз.

Чишү. *Решение.* Из теоремы Виета получаем $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Тогда

$$p^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 1 + 2q, \text{ что и требовалось.}$$

2. Базарда эре һәм вак балыклар сатыла. Бүген өч эре һәм бер вак балыкның бәясе кичәге биш эре балык бәясе кадәр, ә бүген ике эре һәм бер вак балык кичә өч эре һәм бер вак балык торган кадәр тора. Кайсы кыйммәтрәк: бүгенге бер эре һәм ике вак балыкмы, әллә кичәге биш вак балыкмы?

Чишү. Обозначим вчерашние цены большой и маленькой рыбок через b_1 и m_1 соответственно, а сегодняшние — b_2 и m_2 . Тогда по условию задачи имеем:

$$3b_2 + m_2 = 5b_1, \quad 2b_2 + m_2 = 3b_1 + m_1.$$

Выражая b_2 и m_2 через b_1 и m_1 , получим

$$b_2 = 2b_1 - m_1, \quad m_2 = 3m_1 - b_1,$$

откуда $b_2 + 2m_2 = (2b_1 - m_1) + 2(3m_1 - b_1) = 5m_1$. Значит, одна большая и две маленькие сегодня стоят столько же, сколько пять маленьких вчера.

3. Тигезләмәне чишегез: $4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1)$.

Чишү. Заметим, что $x = -1$ не является корнем уравнения, поэтому, разделив обе части исходного уравнения на $x + 1$, получим равносильное уравнение. Обозначая $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = y$, получим квадратное уравнение $4y^2 + 12y -$

$27 = 0$, решением которого являются $y_1 = -\frac{9}{2}$ и $y_2 = \frac{3}{2}$. Таким образом,

исходное уравнение Равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = -\frac{9}{2}, \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

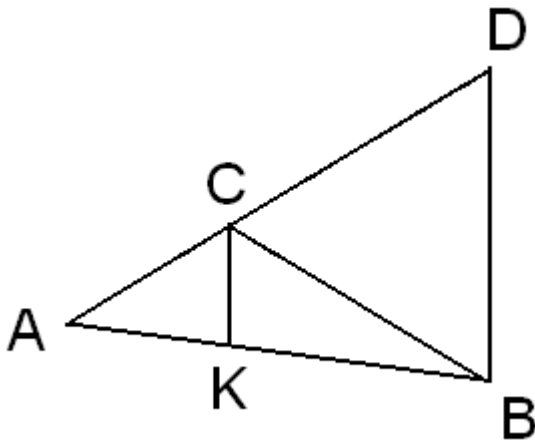
Решением совокупности уравнений являются $x_1 = \frac{81-9\sqrt{97}}{8}$ и $x_2 = 3$.

Ответ. $x_1 = \frac{81-9\sqrt{97}}{8}$ и $x_2 = 3$.

4. ABC өчпочмагында $\angle C = 120^\circ$, CK – биссектриса. Исбатлагыз:

$$\frac{1}{CK} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}.$$

Чишү.



Проведем через вершину B прямую, параллельную биссектрисе CK , до пересечения с прямой AC в точке D . Легко показать, что треугольник BCD – равносторонний. Из подобия треугольников ACK и ADB будем иметь

$$\frac{BD}{CK} = \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{AC} + 1.$$

Разделим обе части равенства $\frac{BD}{CK} = \frac{CD}{AC} + 1$ на BD , получим

$$\frac{1}{CK} = \frac{CD}{AC \cdot BD} + \frac{1}{BD}.$$

Учитывая, что $BD = CD = BC$, получим требуемое равенство.

5. Барлык $x \in (0, \pi)$ өчен $\frac{2 + \cos x}{\sin x} \geq \sqrt{3}$ тигезсезлеген исбатлагыз.

Чишү. **Первый способ.** Функция $f(x) = \frac{2 + \cos x}{\sin x}$ определена и дифференцируема на интервале $(0, \pi)$, причем $f'(x) = -\frac{1 + 2\cos x}{\sin^2 x}$. На данном интервале $f'(x) = 0$ только в одной точке $x = \frac{2\pi}{3}$. Нетрудно заметить, что эта точка является точкой минимума и, следовательно, при $x = \frac{2\pi}{3}$ функция $f(x)$ достигает свое наименьшее значение на интервале $(0, \pi)$. Поэтому для любого x из интервала $(0, \pi)$

$$f(x) \geq f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Второй способ. Рассмотрим разность

$$\frac{2 + \cos x}{\sin x} - \sqrt{3} = \frac{2 + \cos x - \sqrt{3}\sin x}{\sin x} = \frac{2\left(1 + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)}{\sin x} = \frac{2\left(1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sin x}.$$

На интервале $(0, \pi)$ справедливо $\frac{2\left(1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sin x} \geq 0$, то есть

$$\frac{2 + \cos x}{\sin x} - \sqrt{3} \geq 0, \text{ откуда следует требуемое неравенство.}$$

6. Эш көнен 8 сэгатытэн 7 сэгатыкэ кадэр кыскартканнар. Нормалар шул ук калганда эш хакы 5% артсын өчен хезмэт житештерүчәнлеген ничэ процентка арттырырга кирәк?

Чишү. Пусть v – первоначальный объем работы. Так как заработная плата выросла на 5%, то это означает, что объем выполненной работы также возрос на 5% и составил $1,05 \cdot v$.

Пусть x – процент повышения производительности труда. По условию задачи

$$\frac{v}{8} \left(1 + \frac{x}{100} \right) = \frac{1,05 \cdot v}{7}, \text{ откуда, в силу } v \neq 0, \text{ получим } \frac{1}{8} \left(1 + \frac{x}{100} \right) = \frac{1,05}{7}. \text{ Решая}$$

полученное уравнение, найдем $x=20$.

Ответ. На 20%.

